$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} , \frac{3y}{x^2+y^2} , 1 \right)$$

attraverso la superficie S di rappresentazione parametrica

$$r(u,v) = (u\cos(v) , u\sin(v) , u^2) \quad , u \in [0,\tfrac{1}{2}], v \in [0,2\pi]$$

orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.

<u>SOL</u>

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} , \frac{3y}{x^2+y^2} , 1 \right)$$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x = x\cos(y) \\ y = x\sin(y) \\ z = x^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in [0,\tfrac{1}{2}] \\ y \in [0,2\pi] \end{matrix}$$

$$\psi_x = (\cos(y) , \sin(y) , 2x)$$

$$\psi_y = (-x\sin(y) , x\cos(y) , 0)$$

$$\psi_x \wedge \psi_y = (-2x^2\cos(y) , -2x^2\sin(y) , x) \Rightarrow N = (+2x^2\cos(y), 2x^2\sin(y), -x)$$

$$\int_S F.n = \int_D F(\psi)\cdot N = \int_D \left(\frac{2x\cos(y)}{x^2} , \frac{3x\sin(y)}{x^2} , 1 \right) \begin{pmatrix} 2x^2\cos(y) \\ 2x^2\sin(y) \\ -x \end{pmatrix} =$$

$$= \int_D 4x\cos^2(y) + 6x\sin^2(y) - x = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} 4x\cos^2(y) + 6x\sin^2(y) - x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 4x\left(\tfrac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))\right) + 6x\left(\tfrac{1}{2}(y - \sin(y)\cos(y))\right) - xy \Big|_0^{2\pi} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 4x\left(\tfrac{1}{2}(2\pi)\right) + 6x\left(\tfrac{1}{2}(2\pi)\right) - x2\pi \, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 4\pi x + 6\pi x - 2\pi x = \int_0^{\frac{1}{2}} 8\pi x = 8\pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 8\pi\left(\frac{1}{8} - 0\right) = \pi$$

■

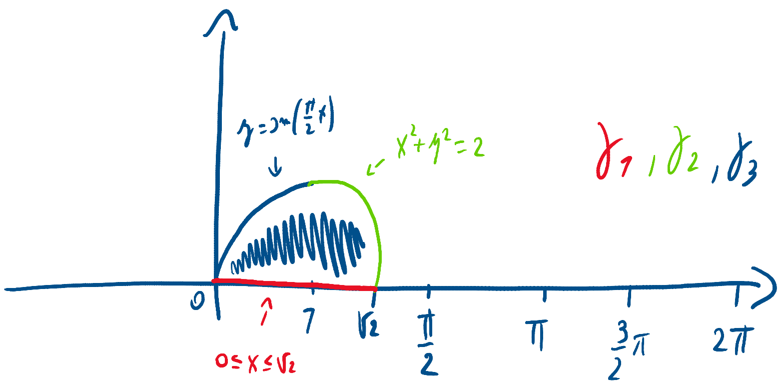
<u>Esercizio</u>:

Calcolare il flusso del rotore del campo $F=(xy, xy, 0)$ attraverso la regione piana $S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x \le \sqrt{2},\ 0 \le y \le \sqrt{2-x^2} \right\}$$

<u>SOL</u>



Applichiamo la formula di Stokes osservando che il bordo $\Gamma = \partial S$ è dato da $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ è il segmento fra } (0,0) \text{ e } (\sqrt{2},0) \\ \gamma_2 \text{ è l'arco di circonferenza } x^2+y^2=2 \text{ da } (\sqrt{2},0) \text{ a } (1,1) \\ \gamma_3 \text{ è la curva } y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ da } (1,1) \text{ a } (0,0) \end{cases}$$

Quindi

$$\int_S rot(F)\cdot\hat{n}\, dS = \oint_\Gamma F\cdot d\Gamma = \int_{\gamma_1} F\, d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F\, d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} F\, d\gamma_3$$

Dobbiamo parametrizzare $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

• Parametrizzo γ_1:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, \sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow F(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \text{su } [0, \sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot d\gamma_1 = 0$$

• Parametrizzo γ_2:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2-t^2} \end{cases} \quad t \in [1, \sqrt{2}]$$

$$\varphi'(t) = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} F\cdot d\gamma_2 = \int_{\gamma_2} F(\varphi)\cdot N_2 = \int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} +\sqrt{2-t^2} \\ +\sqrt{2-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{\gamma_2} t\sqrt{2-t^2} - t^2 = \int_1^{\sqrt{2}} t\sqrt{2-t^2} - t^2\, dt =$$

$$= -\frac{1}{3}(2-t^2)^{3/2} - \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = +\frac{1}{3} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}(2-t^2)^{3/2} - \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = +\frac{1}{3} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1-2\sqrt{2}+1}{3} = \frac{2-2\sqrt{2}}{3}$$

- Parametrizzo γ_3:

Osservo che γ_3 deve essere percorsa al contrario

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} F \cdot d\gamma_3 = -\int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot d\tilde{\gamma}_3$$

$\Rightarrow$ Parametrizzo $\tilde{\gamma}_3$:

$$\Phi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$$\Phi'(t) = \left(1, \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot d\tilde{\gamma}_3 = \int_{\tilde{\gamma}_3} F(\Phi) \cdot N_3 = \int_{\tilde{\gamma}_3} \begin{pmatrix} t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}_3} t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) =$$

$$= \int_0^1 t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\, dt =$$

$$= \cancel{-\frac{2}{\pi}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} + \frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4} = -\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{\pi}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\, dt = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sin(k)} \cdot k\, dk$$

$$\left(\frac{\pi}{2}t\right) = K \Rightarrow t = K\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{2}\,dt = dK$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}K\cdot\cos(K)\sin(K)\,dK = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \underbrace{K}_{f(x)}\,\underbrace{\cos(K)\sin(K)}_{g'(x)\to g(x)=\frac{\sin^2(K)}{2}}\,dK$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{K}{2}\sin^2(K) - \frac{1}{2}\int \sin^2(K)\right) =$$

$$= \frac{K}{\pi}\sin^2(K) - \frac{1}{\pi}\int \underbrace{\sin^2(K)}_{=\frac{1}{2}(K-\sin(K)\cos(K))} = \frac{K}{\pi}\sin^2(K) - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(K-\sin(K)\cos(K)\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\cdot 1 - \left(\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

In conclusione:

$$\int_S rot(F)\cdot n\,dS = \int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F\,d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} F\,d\gamma_3 =$$

$$= 0 + \frac{2-2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}$$

$\blacksquare$

Esercizio:

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F=(y,x,z^3)$ attraverso la superficie sfera S di centro $(0,0,0)$ e raggio 2

Sol

$F=(y,x,z)$

$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=4\right\}$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} F\cdot\hat{n}\, dS = \int_S \mathrm{div}(F)\, dx\,dy\,dz = \int_S 3z^2\, dx\,dy\,dz$$

in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x=\rho \sin(\psi)\cos(\theta) & \rho\in[0,2] \\ y=\rho\sin(\psi)\sin(\theta) & \psi\in[0,\pi] \\ z=\rho\cos(\psi) & \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

$$\int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 3\rho^2\cos^2(\psi)\cdot\rho^2\sin(\psi) = 3\int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho^4\sin(\psi)\cos^2(\psi)\, d\theta\, d\psi\, d\rho =$$

$$=6\pi\int_0^2\int_0^\pi \rho^4\sin(\psi)\cos^2(\psi)\, d\psi\, d\rho =$$

$$=6\pi\int_0^2 \rho^4\left(-\frac{\cos^3(\psi)}{3}\right)\Bigg|_0^\pi d\rho = 6\pi\int_0^2\rho^4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)d\rho = 6\pi\cdot\frac{2}{3}\int_0^2\rho^4\, d\rho$$

$$=4\pi\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^2 = 4\pi\left(\frac{32}{5}\right) = 4\pi\cdot\frac{32}{5}$$

<u>Esercizio</u>:

Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S \mathrm{rot}(F)\cdot\hat{n}\, dS$

dove $F(x,y,z)=(x^2,1,z)$

e S è il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$

e S è il triangolo di vertici (0,-1,0), (1,1,0), (-1,-1,1)

ed $\hat{n}$ è la normale t.c. $\hat{n} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} > 0$

<u>SOL</u>

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x^2 & 1 & z \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

Il campo F è conservativo e il generico potenziale vale:

$U(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + y + \frac{z^2}{2} + K$

Allora

$$\oint_\Gamma F \, d\Gamma = 0$$

e ciò è in accordo col fatto che $\text{rot}(F) = \text{rot}(\nabla U) = 0$

Applicando Stokes si ha:

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot \hat{n} \, dS = \oint_\Gamma F \, d\Gamma = 0$$

<u>Esercizio</u>:

Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x, y, z^4)$ attraverso la superficie S del cilindro circolare di equazione $x^2 + y^2 = 4$, delimitato dai piani $z = -1$ e $z = 1$

<u>SOL</u>

$$\int_{\partial S} F \cdot n = \int_S \text{div}(F) = \int_S 4z^3 + 2$$

in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,2] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,2] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z & z \in [-1,1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_S 4z^3+2 = \int_{-1}^{1}\int_0^2\int_0^{2\pi} 4z^3\rho + 2\rho \, d\theta \, d\rho \, dz =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1}\int_0^2 4z^3\rho + 2\rho \, d\rho \, dz =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} 4z^3 \frac{\rho^2}{2} + \rho^2 \Big|_0^2 \, dz =$$

$$= 2\pi \int^{1} 4z^3 \cdot 2 + 4 = 2\pi \int_{-1}^{1} 8z^3 + 4 \, dz =$$

$$= 2\pi \left(8\,\frac{z^4}{4} + 4z\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{8}{4} - \frac{8}{4} + 4 - (-4)\right) = 16\pi$$

$\blacksquare$

Esercizio 1 :

Calcolare l'area di $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$

dove $a > 0$ e $b > 0$

SOL

Consideriamo la curva Γ che percorre in senso antiorario il bordo della regione E, cioè l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parametrizziamo Γ :

$$\psi(\theta) = \begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Applichiamo la formula di Gauss-Green per l'area :

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$$

dove $\vec{F} = -y + x$

Calcoliamo l'integrale curvilineo :

Ci serve $\psi'(\theta)$ $\Rightarrow$ $\psi'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = -a\sin(\theta) \\ y'(\theta) = b\cos(\theta) \end{cases}$

Inoltre

$$F(\psi(\theta)) = -b\sin(\theta) + a\cos(\theta)$$

Si ha:

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2}\oint \vec{F} \cdot d\Gamma = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx =$$

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\Gamma = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\,dy - y\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos(\theta))\cdot(b\cos(\theta)) - (b\sin(\theta))(-a\sin(\theta))\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2(\theta) + ab\sin^2(\theta) = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot ab = \pi ab$$

Esercizio 2

Calcolare $\oint_\Gamma (x^3 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$

dove Γ è il perimetro del quadrato $Q = [0,2]\times[0,2]$ percorso in senso antiorario

SOL

Non conviene calcolare direttamente l'integrale curvilineo: andrebbe spezzato in 4 integrali.

É opportuno invece usare la formula di Gauss-Green "al rovescio":

$$I = \oint_\Gamma (x^3 - xy^3)\,i_1 + (y^2 - 2xy)\,i_2 = \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - xy^3)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_Q \left[-2y + 3y^2 x\right] dx\,dy = \int_0^2 \int_0^2 3xy^2 - 2y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^2 xy^3 - y^2 \Big|_0^2 dx = \int_0^2 8x - 4 \, dx =$$

$$= 4x^2 - 4x \Big|_0^2 = 8$$

$\blacksquare$

Esercizio 3

Calcolare l'area del dominio E limitato dai grafici delle funzioni

$$f_1(x) = x(1-x) \quad x \in [0,1]$$

$$f_2(x) = x(x^2-1) \quad x \in [0,1]$$

SOL

$$\text{area}(E) = \int_0^1 \int_{x(x^2-1)}^{x(1-x)} dy \, dx = \int_0^1 x(1-x) - x(x^2-1) \, dx =$$

$$= \int_0^1 x - x^2 - x^3 + x \, dx = \int_0^1 -x^3 - x^2 + 2x \, dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-3-4+12}{12} = \frac{5}{12}$$

OPPURE USIAMO GAUSS-GREEN:

Notiamo che $f_2(x) \le 0 \le f_1(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$$\Rightarrow E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ x(x^2-1) \le x(1-x) \right\}$$

Applichiamo Gauss-Green: il bordo Γ di E, percorso in senso antiorario, è dato dall'unione delle due curve

$\Gamma_1 = \text{graf}(f_1)$ e $\Gamma_2 = \text{graf}(f_2)$, orientate in senso antiorario.

Sia $\tilde{\Gamma}_1$ la curva di $\text{graf}(f_1)$ in senso orario (cioè $\tilde{\Gamma}_1 = -\Gamma_1$)

Per la formula di Gauss-Green si ha:

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} x\,dy - y\,dx - \int_{\tilde{\Gamma}_1} x\,dy - y\,dx$$

Parametrizzo Γ_2:

$$\psi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t(t^2-1) \end{cases} \Rightarrow \psi'(t) = \begin{cases} x = 1 \\ y = t^2-1 + t(2t) = 3t^2-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t(3t^2-1) - t(t^2-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 3t^3 - t - t^3 + t = \frac{1}{2} \int_0^1 2t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Parametrizzo Γ_1 :

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t(1-t) \end{cases} \Rightarrow \varphi'(t) = \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t+1 \end{cases}$$

Per cui

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} -2t^2+t - t(1-t) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 -2t^2+t-t+t^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 -t^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

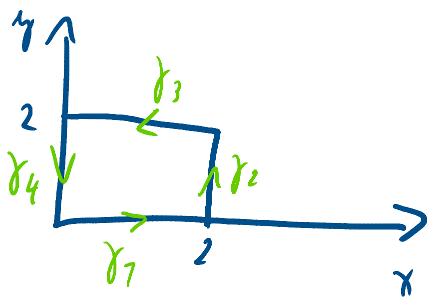
$$= -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \text{area}(E) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}$$

$\blacksquare$

Esercizio 2 (Metodo alternativo):

Sol



Parametrizzo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,2] \Rightarrow \gamma_1' = \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,2] \quad \Rightarrow \quad \gamma_2' = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2 \end{cases} \quad t \in [0,2] \quad \Rightarrow \quad \gamma_3' = \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_4 = \begin{cases} x = 0 \\ y = 2-t \end{cases} \quad t \in [0,2] \quad \Rightarrow \quad \gamma_4' = \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} t^3 = \int_0^2 t^3 \, dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^2 = 4$$

$$\int_{\gamma_2} t^2 - 4t = \int_0^2 t^2 - 4t \, dt = \frac{t^3}{3} - 4\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 8$$

$$\int_{\gamma_3} \left((2-t)^3 - 8(2-t)\right)(-1) = \int_{\gamma_3} \left(8 - t^3 - 12t + 6t^2 - 16 + 8t\right)(-1) =$$

$$= \int_{\gamma_3} t^3 - 6t^2 + 4t + 8 = \frac{t^4}{4} - 6\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 8t \Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 16 + 8 + 16 = 12$$

$$\int_{\gamma_4} (2-t)^2(-1) = \int_{\gamma_4} (4 + t^2 - 4t)(-1) = \int_{\gamma_4} -t^2 + 4t - 4 =$$

$$= \int_0^2 -t^2 + 4t - 4 = -\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 4t\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - 8 = -\frac{8}{3}$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - 8 = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} F = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} =$$

$$= 4 + \frac{8}{3} - 8 + 12 - \frac{8}{3} = 16 - 8 = 8$$

15. Stokes

domenica 15 gennaio 2023 15:15

Esercizio 1:

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

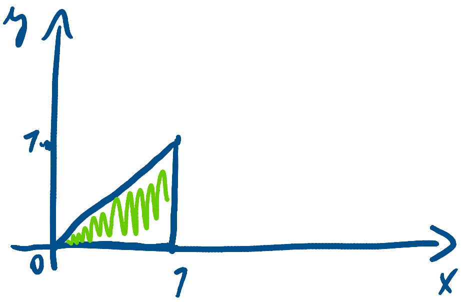
$$F(x,y) = \left(x^2 y + e^{\arctan(\sin(x) + \log(1+x^2))}, \; x y^3 - \cos\left(e^{\sin(y^4+y^2+1)}\right)\right)$$

lungo il bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ percorso in senso antiorario

SOL

Denotiamo con Ω il triangolo, calcoliamo l'integrale

$$\int_{\partial\Omega} F \, d\Omega$$



Osserviamo che $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le x\}$

Posto $F = (f_1, f_2) \Rightarrow$ Per il teorema di Gauss-Green si ha:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx \, dy =$$

$$= \int_{\Omega} y^3 - x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x y^3 - x^2 \, dy \, dx =$$

$$= \int_\Omega y^3 - x^2 \, dx\, dy = \int_0 \int_0 y^3 - x^2 \, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left. \frac{y^4}{4} - x^2 \cdot y \right|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^4}{4} - x^3 \, dx = \left. \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{20} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{5}$$

$\blacksquare$

Esercizio 2 :

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\sin(e^{x^8}) + 15yz ,\ x^2 y + \frac{1}{3y^4+7} + xz ,\ e^{\cos(6z^4+5)} + 8xy \right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2 ,\ x \le 0 ,\ y \ge 0 ,\ z \ge 0 \right\}$$

orientato positivamente rispetto al versore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z

SOL

Per il teorema di Stokes si ha che:

$$\int_{\partial\Sigma} F \, dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}(F) \cdot n \, d\sigma$$

Per cui calcoliamoci $\mathrm{rot}(F)$:

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \sin(e^{x^8}) + 15yz & x^2y + \dfrac{7}{3y^4+7} + xz & e^{\cos(6z^4+5)} + 8xy \end{vmatrix} =$$

$$= \left(7x \,,\; 7y \,,\; 2xy - 14z\right)$$

Ora parametrizzo Σ:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases} \qquad \text{e} \quad x,y \in D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 9,\; x \leq 0,\; y \geq 0 \right\}$$

$\varphi_x = (1, 0, -2x)$

$\varphi_y = (0, 1, -2y)$

$\varphi_x \wedge \varphi_y = (2x, 2y, 1)$

Ma $N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow$ è acuto $\Rightarrow N = (-2x, -2y, -1)$

Segue che:

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot}(F) \cdot n \, d\sigma = \int_D \text{rot}(F(\varphi)) \cdot N \, dx\, dy =$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \\ 2xy - 126 + 14x^2 + 14y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -1 \end{pmatrix} = \int_D 126 - 28x^2 - 28y^2 - 2xy$$

in polari:

$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \end{cases} \qquad \rho \in [0, 3]$

in polari: $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho\in[0,3] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta\in[\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 126\rho - 28\rho^3 - 2\rho^3\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \int_0^3 126\rho\theta - 28\rho^3\theta - 2\rho^3\frac{\sin^2(\theta)}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\,d\rho =$$

$$= \int_0^3 126\rho\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) - 28\rho^3\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) - 2\rho^3\left(-1\right)\,d\rho =$$

$$= \int_0^3 126\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\rho - 28\cdot\frac{\pi}{2}\rho^3 + 2\rho^3\,d\rho = \int_0^3 63\pi\rho - 14\pi\rho^3 + 2\rho^3\,d\rho =$$

$$= 63\pi\frac{\rho^2}{2} - 14\pi\frac{\rho^4}{4} + 2\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3 = 63\pi\cdot\frac{9}{2} - 14\pi\cdot\frac{81}{4} + 2\cdot\frac{81}{4}$$

$\blacksquare$

Esercizio 3:

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(5x^2 - 1 + \cos(e^{xz} - 1),\ 5y^2 - \log(1 + \arctan^2(xz)),\ 2y - \sin(xz)\right)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 9,\ x\geq 0,\ z\geq 0\right\}$

orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z

<u>SOL</u>

Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_{\Sigma} \text{rot}(F) \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \, dP$$

Osserviamo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

dove $\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 = 9 \,,\, z=0 \,,\, x \geq 0 \right\}$

$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y^2+z^2 = 9 \,,\, x=0 \,,\, z \geq 0 \right\}$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve che parametrizzano Γ_1 e Γ_2 in modo che $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sia percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale a Σ, che deve formare un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Si ha che:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \gamma_1'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t), 0)$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 3\cos(t) \\ z = 3\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \gamma_2'(t) = (0, -3\sin(t), 3\cos(t))$$

Quindi:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_1) \cdot N_1 \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \begin{pmatrix} 45\cos^2(t) \\ 45\sin^2(t) \\ 6\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} -135\sin(t)\cos^2(t) + 135\cos(t)\sin^2(t) =$$

$$= 135 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos(t)\sin^2(t) - \sin(t)\cos^2(t) \, dt =$$

$$= 135 \left(\frac{\sin^3(t)}{3} + \frac{\cos^3(t)}{3} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = 135 \left(\frac{2}{3} \right) = 90$$

$$\cdot \int_{\gamma_2} F \, dP = \int_0^{\pi} F(\gamma_2) \cdot N_2 = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 45\cos^2(t) \\ 6\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{\pi} -135\sin(t)\cos^2(t) + 18\cos^2(t) \, dt =$$

$$= 135 \left(\frac{\cos^3(t)}{3} \right) + 18 \left(\frac{1}{2} (t + \sin(t)\cos(t)) \right) \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 135\left(-\frac{2}{3}\right) + 18\left(\frac{1}{2}(\pi)\right) = -90 + 9\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \mathrm{rot}(F)\cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = 90 - 90 + 9\pi = 9\pi$$

$\blacksquare$

Esercizio 4:

Calcolare il flusso entrante del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(x^3 + y \log(z^2+1),\ 4y + xz \log(1+x^2z^2),\ z^3 + x \log(y^2+1)\right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+z^2 \le 4,\ 0 \le y \le 2\right\}$

SOL

Usiamo il Teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}(F)\, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega} 3x^2 + 4 + 3z^2$$

$$= \int_{\Omega} 3x^2 + 3z^2 + 4$$

in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,2] \\ z = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0,2\pi] \\ y = y & y \in [0,2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 + 4\rho \; d\theta \, d\rho \, dy = 2\pi \int_0^2 \int_0^2 3\rho^3 + 4\rho \; d\rho \, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^2 3\frac{\rho^4}{4} + 4\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 \, dy = 2\pi \int_0^2 12 + 8 \; dy = 2\pi \int_0^2 20 \; y =$$

$$= 2\pi \left(20y\right)\Big|_0^2 = 80\pi$$

che è uscente $\Rightarrow$ Flusso entrante $= -80\pi$

∎

Esercizio 5:

Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(2x^2 + e^{y^6} - 3z^{10},\; xy + e^{z^6} - 3x^{10},\; 3x^6y^{10} - xz\right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3 - y^2 - z^2 \le x \le 6 - 4\sqrt{y^2+z^2},\; y^2+z^2 < 9,\; z \le 0 \right\}$

Sol

Usiamo il teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) \, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} 4x \; dx\, dy\, dz =$$

$$\int \int^{6-4\sqrt{y^2+z^2}} 4x \; dx \, dy \, dz = \int 4 \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|^{6-4\sqrt{y^2+z^2}} dy\, dz =$$

$$= \iint_D \int_{3-y^2-z^2}^{6-4\sqrt{y^2+z^2}} 4x \, dx \, dy \, dz = \iint_D 4 \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{3-y^2-z^2}^{6-4\sqrt{y^2+z^2}} dy \, dz =$$

$$= \iint_D 4 \left(\frac{36+16(y^2+z^2) - 48\sqrt{y^2+z^2}}{2} - \frac{9+y^2+z^2-6y^2-6z^2+2z^2y^2}{2} \right) dx \, dy$$

$$= \iint_D 72 + 32(y^2+z^2) - 96\sqrt{y^2+z^2} - 18 + 10y^2 + 10z^2 - 4x^2y^2$$

in polari:

$$\begin{cases} y = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,3] \\ z = \rho\sin(\theta) & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \int_\pi^{2\pi} 72\rho + 32\rho^3 - 96\rho^2 - 18\rho + 10\rho^3\cos^2(\theta) + 10\rho^3\sin^2(\theta) - 4\rho^5\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$$

$$= \int_0^3 72\rho\theta + 32\rho^3\theta - 96\rho^2\theta - 18\rho\theta + 10\rho^3\left(\frac{1}{2}(\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right) +$$

$$+ 10\rho^3\left(\frac{1}{2}(\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\right)$$

$$- 4\rho^5\left(\cancel{\frac{1}{3}\cos(\theta)\sin^3(\theta)} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{32}\left(12\theta - \cancel{8\sin(2\theta)} + \cancel{\sin(4\theta)}\right)\right)\right)\Bigg|_\pi^{2\pi}$$

$$\int \underbrace{\cos(\theta)}_{f(x)} \underbrace{\cos(\theta)\sin^2(\theta)}_{g'(x) \to g = \frac{\sin^3(\theta)}{3}} = \cos(\theta) \cdot \frac{\sin^3(\theta)}{3} + \int \frac{\sin^4(\theta)}{3} =$$

$$\frac{1}{3}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{32}\left(12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)\right)\right)$$

$f(x)$ $\quad g'(x) \to g = \frac{\sin^3(\theta)}{3}$

$$= \frac{1}{3}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{32}\left(12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)\right)\right)$$

$$= \int_0^3 72\pi\rho + 32\pi\rho^3 - 96\pi\rho^2 - 78\pi\rho + 10\rho^3\left(\frac{1}{2}(\pi)\right) + 10\rho^3\left(\frac{1}{2}(\pi)\right) - 4\rho^5\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{32}(12\pi)\right)\right) =$$

$$= \int_0^3 72\pi\rho + 32\pi\rho^3 - 96\pi\rho^2 - 78\pi\rho + 10\pi\rho^3 - \frac{1}{2}\pi\rho^5 \, d\rho =$$

$$= 72\pi\frac{\rho^2}{2} + 32\pi\frac{\rho^4}{4} - 96\pi\frac{\rho^3}{3} - 78\pi\frac{\rho^2}{2} + 10\pi\frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{2}\pi\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^3 =$$

$$= 72\pi\cdot\frac{9}{2} + 32\pi\frac{3^4}{4} - 96\pi\cdot 3 - 78\pi\cdot\frac{9}{2} + 10\pi\frac{3^4}{4} - \frac{1}{2}\pi\frac{3^6}{6} = \frac{675}{4}\pi$$

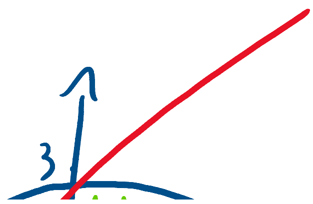
Esercizio 6:

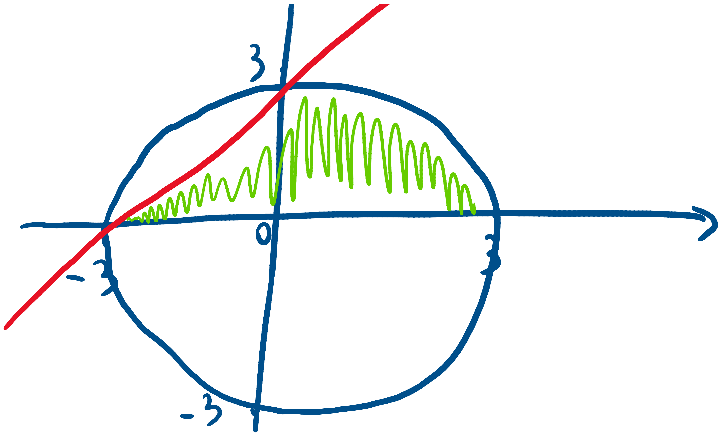
Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(7y - e^{3\sin(x)},\ 2\cos\left(e^{3y+7}\right) - x^2 y + 7x\right)$$

lungo il bordo dell'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le y \le x+3\}$ percorso in senso orario

SOL





Posto $F=(f_1,f_2)$, per il Teorema di Gauss-Green si ha che:

$$\int_{\partial\Omega} F\, dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right] dx\, dy = \int_{\Omega} -2xy + 7 - 7 =$$

$$= \int_{\Omega} -2xy = -2\int_{\Omega} xy$$

Osserviamo che $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 3,\ y-3 \le x \le \sqrt{9-y^2}\}$

$\Rightarrow$

$$-2\int_{\Omega} xy = -2\int_0^3 \int_{y-3}^{\sqrt{9-y^2}} xy\, dx\, dy = -2\int_0^3 y \left.\frac{x^2}{2}\right|_{y-3}^{\sqrt{9-y^2}} dy =$$

$$= -2\int_0^3 y\left(\frac{9-y^2}{2} - \frac{y^2+9-6y}{2}\right) dy = -2\int_0^3 y\left(\frac{-2y^2+6y}{2}\right)$$

$$= -\int_0^3 -2y^3+6y^2 = -\left.\left(-2\frac{y^4}{4}+6\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^3 =$$

$$= -\left(-2\,\frac{3^4}{4} + 54\right) = -\frac{27}{2}$$

$\Rightarrow$ Percorso in senso orario sarà

$$\int_{\partial\Omega^-} F\, dP = \frac{27}{2}$$

$\blacksquare$

Esercizio 7:

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(3yz + \sin^8(x),\ xz + \log^6(1+y^2),\ 2xy + e^{z^2}\right)$$

lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 4 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

orientato positivamente rispetto ad un osservatore posto come il vettore uscente dal paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$

SOL

Per il Teorema di Stokes si ha che:

$$\int_{\partial\Sigma} F\, dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}(F) \cdot n \, d\sigma$$

$$\Rightarrow rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 3zy+\sin^8(x) & xz+\log^4(1+y^2) & 2xy+e^{z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x\,,\; y\,,\; -2z)$$

Ci serve $\hat{n}$:

Parametrizzo Σ:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$\psi_x = (1, 0, -2x)$

$\psi_y = (0, 1, -2y)$

$\psi_x \wedge \psi_y = (2x, 2y, 1)$

Ne segue che

$$\int_{\partial\Sigma} F\, dP = \int_{\Sigma} rot(F)\cdot n\, d\sigma = \int_D rot(F(\psi))\,.\,N\; dx\, dy$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2(4-x^2-y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy = \int_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ -8+2x^2+2y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_D 2x^2+2y^2+2x^2+2y^2-8 = \int_D 4(x^2+y^2)-8 \, dx\, dy$$

in polari:

$$\begin{cases} x=\rho\cos(\theta) & \rho\in[0,\sqrt{3}] \\ y=\rho\sin(\theta) & \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/2} 4\rho^3-8\rho \, d\theta\, d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 4\rho^3-8\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(4\frac{\rho^4}{4}-8\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}(9-12) = -\frac{3}{2}\pi$$

$\blacksquare$

Esercizio 8:

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$F(x,y,z) = \left(y\cdot\sin(x+\cos(z^4))-3z,\ y^8 e^{x+z},\ 3x+5x^2z\right)$

attraverso la superficie $\Sigma = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid y=2-\sqrt{x^2+z^2},\ y\geq 0\}$

orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse y.

SOL

Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_{\Sigma} \text{rot}(F)\cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \, dP$$

Si ha che:

$$\partial\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y=0 \,,\; x^2+z^2=4 \right\}$$

Parametrizzo $\partial\Sigma$:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 0 \\ z = 2\sin(\theta) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \psi'(\theta) = \begin{cases} x = -2\sin(\theta) \\ y = 0 \\ z = 2\cos(\theta) \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$

Quindi:

$$\int_{\Sigma} \text{rot}(F)\cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \, dP = \int_{\gamma} F(\psi)\cdot \psi' \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6\sin(\theta) \\ 0 \\ 6\cos(\theta) + 40\cos^2(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin(\theta) \\ 0 \\ 2\cos(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} 12\sin^2(\theta) + 12\cos^2(\theta) + 80\sin(\theta)\cos^3(\theta) \, d\theta =$$

$$= \int^{2\pi} 12 + 80\sin(\theta)\cos^3(\theta) = 12\theta - 80\frac{\cos^4(\theta)}{4}\Big|^{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} 12 + 80 \sin(\theta) \cos^3(\theta) = 12\theta - 80 \left. \frac{\cos^4(\theta)}{4} \right|_0^{2\pi} =$$

$$= 12(2\pi) - 80\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 24\pi$$

Esercizio 9:

Calcolare l'integrale di linea del campo vettoriale

$F(x,y) = \left(e^{\sin(x)} - 3x^2 y \ , \ 2xy - \sqrt{2+\cos(y)} \right)$

lungo il bordo di $\Omega = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \ , x \geq 0 \ , y \geq 0 \right\}$

percorso in senso antiorario

SOL

Posto $F = (f_1, f_2)$, per il Teorema di Gauss-Green si ha:

$$\int_{\partial\Omega} F \, dP = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \right] dx\,dy =$$

$$= \int_{\Omega} 2y + 3x^2 \, dx\,dy$$

in polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,2] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \int_0^{\pi/2} 2\rho^2 \sin(\theta) + 3\rho^3 \cos^2(\theta) \; \partial\theta \, \partial\rho =$$

$$= \int_0^2 -2\rho^2 \cdot \cos(\theta) + 3\rho^3 \left(\frac{1}{2}(\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \int_0^2 +2\rho^2 + 3\rho^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right) = \int_0^2 +2\rho^2 + \frac{3}{4}\pi\rho^3 \; \partial\rho =$$

$$= +2\frac{\rho^3}{3} + \frac{3}{4}\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = +\frac{16}{3} + 3\pi = 3\pi + \frac{16}{3}$$

$\blacksquare$

Esercizio :

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$F(x,y,z) = (-x^2 y, x^3 + z^2, \arctan(e^{x+y+z}))$

attraverso la superficie $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=4 \;,\; z \geq 0 \right\}$

orientato secondo i versori uscenti dall'origine.

SOL

Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(F) \cdot n \; d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \, \partial P$$

Possiamo parametrizzare il bordo, che è una circonferenza sul piano xy:

$$\psi(t) = \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \psi' = \begin{cases} x = -2\sin(t) \\ y = 2\cos(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

Dunque si ha:

$$\int_{\partial\Sigma} F \, dP = \int_0^{2\pi} F(\psi) \cdot \psi' \, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -8\cos^2(t)\sin(t) \\ 8\cos^3(t) \\ \arctan\left(e^{2\cos(t) + 2\sin(t)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\cos^2(t)\sin^2(t) + 16\cos^4(t) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\cos^2(t) \, dt = 16\left(\frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 16\left(\frac{1}{2}(2\pi)\right) = 16\pi$$

∎

<u>Esercizio</u>:

Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\sin(x^2+z) - 2yz, \; 2xz + \sin(y^2+z), \; \sin(x^2+y^2)\right)$$

lungo la circonferenza $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 7, \; z = 3 \right\}$ percorsa in modo che la proiezione sul piano xy giri in senso orario

SOL

Applichiamo il teorema di Stokes

$$\int_{\Gamma} F\, dP = \int_{\Sigma} rot(F) \cdot n \qquad \text{dove } \Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 1,\ z=3 \right\}$$

Si ha che

$$rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \sin(x^2+z)-2yz & 2xz+\sin(y^2+z) & \sin(x^2+y^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(2y\cos(x^2+y^2) - 2x - \cos(y^2+z),\ -2x\cos(x^2+y^2) + \cos(x^2+z) - 2y,\ 4z\right)$$

Ora se parametrizzo Σ:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 3 \end{cases}$$

$\psi_x = (1,0,0)$

$\psi_y = (0,1,0)$

$\psi_x \wedge \psi_y = (0,0,1) \quad \Rightarrow N = (0,0,-1)$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} rot(F) \cdot n = \int_{\Sigma} -4z\, d\sigma = -4\int_{\Sigma} z\, d\sigma = -4\int_{\Sigma} 3\, d\sigma =$$

$$= -12 \int_{\Sigma} d\sigma$$

in polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,1] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0,2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -12 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \, d\rho = -24\pi \int_0^1 \rho \, d\rho = -24\pi \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -12\pi$$

$\blacksquare$

Esercizio:

Calcolare la circuitazione del campo

$F(x,y,z) = (z-y,\ x-z,\ y-x)$

lungo il bordo della calotta triangolare $T \subset \mathbb{R}^3$ di vertici $\overset{A}{(1,0,0)}, \overset{B}{(0,1,1)}, \overset{C}{(0,0,1)}$ orientato nel senso secondo cui C segue A e precede B

SOL

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} = (2,2,2) \neq (0,0,0)$$

$\Rightarrow \operatorname{rot}(F) \neq (0,0,0) \Rightarrow F$ non è conservativo

Possiamo procedere in due modi:

1° Metodo: Teorema di Stokes

2° Metodo: Procurarsi una parametrizzazione per ciascuno

<u>2° Metodo</u> : Procurarsi una parametrizzazione per ciascuno dei tre segmenti che compongono $\Gamma(T)$ e calcolando l'integrale di linea

<u>1° Metodo</u> :

Applicando il teorema di Stokes si ha:

$$L_{\Gamma(T)}(F) = \int_T rot(F) \cdot n \, d\sigma$$

Poiché T giace sul piano $x+z-1=0$, il versore n è costante su T e coincide con uno dei due versori normali a tale piano che sono $\pm \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Si ottiene che $n = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dunque

$$\int_T rot(F) \cdot n \, d\sigma = -\int_T \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\int_T 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \int_T d\sigma =$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot area(T) = -2$$

<u>2° Metodo</u> :

Denotiamo con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ i segmenti AC, CB, BA

Si ha:

$$\oint_{\Gamma(T)} F\, dP = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_i} F\, dP$$

Dobbiamo parametrizzare $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = 1-t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \gamma_1' = \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} F\, dP = \int_{\gamma_1} F(\gamma_1) \cdot \gamma_1'\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ -1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 -t - 1 + t = -\int_0^1 dt = -1$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \gamma_2' = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} F\, dP = \int_{\gamma_2} F(\gamma_2)\, \gamma_2' = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^1 -1\, dt = -1$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \gamma_3' = \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \dots \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \gamma_3' = \begin{cases} y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} F \, dP = \int_{\gamma_3} F(\gamma_3) \cdot \gamma_3' = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2t-1 \\ 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 1 - 2t + 2t - 1 \, dt = 0$$

In conclusione

$$\int_{\Gamma(T)} F \, dP = -1 - 1 + 0 = -2$$

$\blacksquare$

Esercizio:

Calcolare il flusso del campo $F = (x^2+3z, 2zx, \log(x))$ uscente dalla frontiera dell'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le \frac{1}{2}, \; -y - \frac{1}{2} \le z \le y + \frac{1}{2}, \; x \ge 0 \right\}$$

SOL

Usiamo il teorema della divergenza

$$\int_{\partial A} F \, dP = \int_A \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz =$$

$$\int_{\partial A} \quad \int_{A}$$

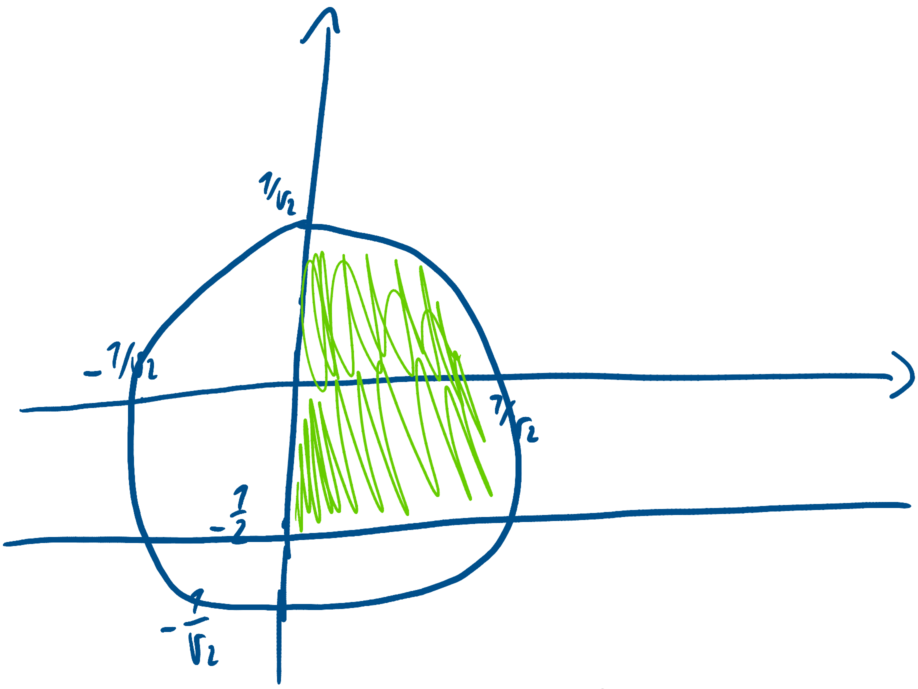
$$= \int_A 2x \, dx \, dy \, dz = \int_\Omega \int_{-y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} 2x \; dz \; dx \, dy =$$

$$= \int_\Omega 2x \, z \Big|_{-y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} = \int_\Omega 2x \left(y+\tfrac{1}{2}+y+\tfrac{1}{2}\right) dx \, dy =$$

$$= \int_\Omega 2x(2y+1) = \int_\Omega 4xy + 2x \;\; dx \, dy$$

Or

$$\Omega = \begin{cases} x^2+y^2 \le \frac{1}{2} \\ x \ge 0 \\ -y-\frac{1}{2} \le y+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le \frac{1}{2} \\ x \ge 0 \\ y \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \int 4xy + 2x = \int^{1/\sqrt{2}} \int^{\sqrt{\frac{1}{2}-y^2}} 2x(2y+1) \; dx \; dy \quad =$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} 4xy+2x = \int_{-\frac{1}{2}} \int_{0} 2x(2y+1)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1/\sqrt{2}} (2y+1)\, x^2 \Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-y^2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/\sqrt{2}} (2y+1)\left(\tfrac{1}{2}-y^2\right) dy =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1/\sqrt{2}} y - 2y^3 + \frac{1}{2} - y^2\, dy = -2\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \Big|_{-\frac{1}{2}}^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= \ldots = \frac{23}{96} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$\blacksquare$

Esercizio:

Sia Σ la porzione di paraboloide $y = x^2+z^2$ che si proietta su piano $y=0$ nel semicerchio $x^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.
Calcolare il flusso del campo vettoriale
$F(x,y,z) = (xz^2, xz, x^2z)$
attraverso Σ, orientata in modo che il suo versore normale formi in ogni punto angolo ottuso con il versore J dell'asse y

SOL

Dunque $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = x^2+z^2,\ x^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0 \right\}$

Dunque $\Sigma = \{ (\ldots z) \in \mathbb{R} \mid \ldots$

$$\Rightarrow \Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = x^2 + z^2,\ y \leq 1,\ z \geq 0 \right\}$$

Tuttavia ancora non possiamo applicare il teorema della divergenza perché Σ non è una calotta chiusa.
Chiudiamo Σ unendovi le due calotte Σ_1 e Σ_2

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + z^2 \leq 1,\ y = 1,\ z \geq 0 \right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 \leq y \leq 1,\ z = 0 \right\}$$

Poniamo $\Sigma_0 = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\Rightarrow \Sigma_0$ è una calotta chiusa

Possiamo applicare ora il teorema della divergenza:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega x^2 + z^2\, dx\, dy\, dz$$

dove $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + z^2 \leq y \leq 1 \right\}$

$$\Rightarrow \int_D \int_{x^2+z^2}^{1} x^2 + z^2\, dy\, dx\, dz = \int_D (x^2 + z^2)\, y \Big|_{x^2+z^2}^{1} dx\, dz =$$

$$= \int_D (x^2+z^2)(1-x^2-z^2)\, dx\, dy = \int_D (x^2+z^2) - (x^2+z^2)^2 \, dx\, dz$$

in polari: $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,1] \\ z = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0,\pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^\pi \rho^3 - \rho^5 \, d\theta\, d\rho = \pi \int_0^1 \rho^3 - \rho^5 =$$

$$= \pi \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \pi \left(\frac{3-2}{12} \right) = \frac{1}{12}\pi$$

- $$\int_{\Sigma_1} F \cdot n = \int_{\Sigma_1} \begin{pmatrix} xz^2 \\ xz \\ x^2 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma = \int_{\Sigma_1} xz$$

Parametrizzo Σ_1:

$$\psi(x,z) = \begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = z \end{cases}$$

$\psi_x = (1,0,0)$

$\psi_z = (0,0,1)$

$\psi_x \wedge \psi_z = (0,-1,0)$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma_1} xz \, d\sigma = \int xz \cdot \|N_1\| = \int xz$$

$$\int_{\Sigma_1} xz \, d\sigma = \int_D xz \cdot \|N_1\| = \int_D xz$$

in polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) & \rho \in [0,1] \\ z = \rho \sin(\theta) & \theta \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^\pi \rho^3 \cos(\theta) \sin(\theta) = \int_0^1 \rho^3 \left. \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right|_0^\pi d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^3 (0 - 0) = 0$$

Parametrizzando infine Σ_2 si ha che $z=0$

$$\Rightarrow F(x,y,0) \equiv 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_2} F \, dP = 0$$

In conclusione

$$\int_{\Sigma_0} F \, dP = \frac{\pi}{12} + 0 + 0 = \frac{1}{12}\pi$$

■

<u>Esercizio</u>:

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$F(x,y,z) = (x, 2zy, -1)$ attraverso la porzione di ellissoide

$< \quad \{ \ \underline{x^2+y^2} + z^2 = 1$

$$\Sigma = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

orientato secondo il verso che si allontana dall'origine

<u>SOL</u>

La superficie $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1, \quad z \geq 0 \right\}$

è la parte dell'ellissoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e non costituisce la frontiera di un aperto, per cui non è possibile applicare il teorema della divergenza.

Possiamo allora chiudere la superficie Σ aggiungendo il cerchio di base:

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Così facendo, la superficie $\Sigma \cup \Sigma_1$ è la frontiera dell'aperto $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 < 1 \quad , z > 0 \right\}$

Possiamo ora usare il teorema della divergenza:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz$$

Si ha:

$$\int_{\Omega} div(F)\, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega} 1+2z\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_D 1+2z\, dx\,dy\, dz$$

dove $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4(1-z^2) \right\}$

$\Rightarrow$ in polari: $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0, 2\sqrt{1-z^2}] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{1-z^2}} (1+2z)\rho\, d\rho\, d\theta\, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+2z) \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{2\sqrt{1-z^2}} d\theta\, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+2z)\left(2(1-z^2)\right) d\theta\, dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 2(1-z^2)(1+2z)\, dz = 4\pi \int_0^1 1+2z-z^2-2z^3\, dz =$$

$$= 4\pi \left(-2\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + z^2 + z\right)\Bigg|_0^1 = 4\pi\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + 1\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{-3-2+6+6}{6}\right) = \frac{14}{3}\pi$$

Resta da calcolare il flusso su Σ_1:

$$\int_{\Sigma_1} F\cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} \begin{pmatrix} x \\ 2zy \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\sigma = \int_{\Sigma_1} d\sigma = \text{area}(\Sigma_1) = 4\pi$$

In conclusione:

$$\int_{\Sigma} F\cdot n \, d\sigma = \frac{14}{3}\pi - 4\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$\blacksquare$

16. Eserciziario Marcellini-Sbordone

lunedì 23 gennaio 2023 15:15

E2 :

Calcolare l'area della porzione $(0 \leq z \leq 2)$ del grafico del paraboloide di equazione $x^2+y^2=z$

Sol

Parametrizzo

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x^2+y^2 \leq 2$$

$$\psi_x = (1,0,2x)$$

$$\psi_y = (0,1,2y)$$

$$\psi_x \wedge \psi_y = (-2x,-2y,1)$$

$$\Rightarrow \|\psi_x \wedge \psi_y\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma d\sigma = \int_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

in polari: $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) & \rho \in [0,\sqrt{2}] \\ y = \rho\sin(\theta) & \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\int_0 \int_0 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_0 \frac{1}{12}(1+4\rho^2)\Big|_0 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(9)^{3/2} - \frac{1}{12}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\cdot 27 - \frac{1}{12}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{26}{12}\,d\theta = 2\pi\,\frac{26}{12} = \frac{26}{6}\pi = \frac{13}{3}\pi$$

$\blacksquare$

ES:

Determinare l'area della superficie piana S di $\mathbb{R}^3$ definita da: $z = ax + by + c \quad , \quad 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1$

SOL

Parametrizzo

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = ax + by + c \end{cases}$$

$\psi_x = (1, 0, a)$

$\psi_y = (0, 1, b)$

$\psi_x \wedge \psi_y = (-a, -b, 1)$

$\|\psi_x \wedge \psi_y\| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow \int_S d\sigma = \int_D \sqrt{1+a^2+b^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+a^2+b^2}\,dx\,dy$$

$$\int_S d\sigma = \int_D \sqrt{1+a^2+b^2}\,dx\,dy = \int_0 \int_0 \sqrt{1+a^2+b^2}\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{1+a^2+b^2}$$

■

ES:

La "finestra di Viviani" è costituita dalla parte della superficie della sfera di centro l'origine e raggio r, interna al cilindro circolare retto avente per base il cerchio di centro $(\frac{r}{2}, 0)$ e raggio $\frac{r}{2}$ con $z \geq 0$

(a): Calcolare area della "finestra di Viviani" $= S$

(b): Indichiamo con γ il bordo della superficie S. Verificare che γ non è di classe C^1 in un intorno di $(r, 0, 0)$

(c): Il bordo γ è l'intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ e del cilindro di equazione $(x-\frac{r}{2})^2+y^2=(\frac{r}{2})^2$. Perciò γ è definita dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x^2-rx+y^2=0 \end{cases}$$

Spiegare perché γ non è di classe C^1

Spiegare perché non vale la tesi del teorema del Dini.

<u>Sol</u>

(a): Rappresentiamo S in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Dobbiamo capire dove variano ρ e θ:

$\rho \leq r\cos(\theta)$ [la formula generale è $\rho \leq 2r\cos(\theta)$]

Per θ procediamo così:

Imponiamo che il punto (x, y, z) sia sulla superficie della sfera $\Rightarrow$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow r^2 = (\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \rho^2 + z^2 \Rightarrow z = \sqrt{r^2 - \rho^2}$$

$$\Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Per cui si ha:

$$\Gamma(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \leq r\cos(\theta) \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}$$